Каноническое квантование теорий со старшими производными

Курсовая работа студента второго курса
Мишнякова Виктора Викторовича

Научный руководитель:
доктор физ.-мат. наук, академик РАН
Рубаков Валерий Анатольевич

Постановка задачи

- Рассмотреть процедуру квантования теорий, содержащих старшие производные.
- Проквантовать модельную теорию с конкретным лагранжианом.

Гамильтонов формализм

Лагранжиан вида: $L(q, \dot{q}, \ddot{q}, \ldots, q^{(N)})$

Введем следующие переменные:

$$q_s = q^{(s-1)} \quad s = 1, \ldots, N, \quad p^N = \frac{\partial L}{\partial q^{(N)}} \quad p^s = \frac{\partial L}{\partial q_{s+1}} - \dot{p}^{s+1}$$

Гамильтониан имеет вид:

$$H = \sum_{s=1}^{N-1} p^s q_{s+1} + p^N q^{(N)} - L$$

Квантование

Постулируем коммутационные соотношения:

$$[q_i, q_j] = 0 \qquad [p_i, p_j] = 0 \qquad [p_i, q_j] = \delta_{ij} \quad i, j = 1, \ldots, N$$

Вводим операторы рождения и уничтожения:

$$a_i = \frac{1}{\sqrt{2\omega_i}}(\omega_i q_i + ip_i), \quad a_i^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\omega_i}}(\omega_i q_i - ip_i)$$

Заметим, что в случае N производных, имеем N различных операторов рождения и уничтожения

Преобразование Боголюбова

Пусть гамильтониан является общей квадратичной формой операторов рождения и уничтожения

$$H = \sum_{\alpha,\beta} L_{\alpha\beta} a^\dagger_\alpha a_\beta + \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta}(M_{\alpha\beta} a^\dagger_\alpha a^\dagger_\beta + M^*_{\alpha\beta} a_\alpha a_\beta),$$

$$L_{\alpha\beta} = L^*_{\beta\alpha} \quad M_{\alpha\beta} = M_{\beta\alpha}, \qquad \alpha,\beta = 1,\ldots,N$$

$$[a_\alpha, a^\dagger_\beta] = \delta_{\alpha\beta}, \quad [a_\alpha, a_\beta] = 0 \qquad \alpha,\beta = 1,\ldots,N$$

Проведем следующее преобразование:

$$b_\mu = \sum_\alpha (u_{\mu\alpha} a_\alpha - v_{\mu\alpha} a^\dagger_\alpha) \qquad \mu = 1,\ldots,N$$

Преобразование Боголюбова

В терминах новых операторов Гамильтониан имеет вид:

$$H = E_0 + \sum_\mu E_\mu b_\mu^\dagger b_\mu \qquad \mu = 1, \ldots, N$$

Чтобы новые операторы удовлетворяли стандартным коммутационным соотношениям, должно выполняться следующее условие:

$$\sum_\alpha u_{\mu\alpha} u_{\nu\alpha}^* - v_{\mu\alpha} v_{\nu\alpha}^* = \delta_{\mu\nu}$$

$$\sum_\alpha u_{\mu\alpha} v_{\nu\alpha} - v_{\mu\alpha} u_{\nu\alpha} = 0$$

Преобразование Боголюбова

Имеем следующую систему на элементы матрицы преобразования и энергии возбуждений:

$$\left.\begin{aligned} \sum_\beta E_\mu \delta_{\alpha\beta} u_{\mu\beta} &= \sum_\beta (v_{\mu\beta} M^*_{\beta\alpha} + L^*_{\alpha\beta} u_{\mu\beta}) \\ \sum_\beta E_\mu \delta_{\alpha\beta} u_{\mu\beta} &= -\sum_\beta (u_{\mu\beta} M_{\beta\alpha} + L_{\alpha\beta} v_{\mu\beta}) \end{aligned}\right\}$$

Модельный лагранжиан

$$L = \ddot{q}^2 + \alpha \dot{q}^2 + \beta q^2$$

Гамильтонов формализм

Для данного лагранжиана имеем:

$$q_1 = q, \quad q_2 = \dot{q}$$

$$p^2 = \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} = 2\ddot{q} = 2\dot{q}_2 \quad p^1 = \frac{\partial L}{\partial q_2} - \dot{p}^2$$

$$H = p^1 q_2 + \frac{1}{4}(p^2)^2 - \alpha q_2^2 - \beta q_1^2$$

Гамильтонов формализм

Рассмотрим лагранжиан:

$$L = \alpha \dot{q}^2 + \beta q^2 - x^2 + 2x\ddot{q}.$$

Вычитаем полную производную:

$$\hat{L} = \alpha \dot{q}^2 + \beta q^2 - x^2 - 2\dot{x}\dot{q}.$$

Гамильтониан:

$$\hat{H} = p_q \dot{q} + p_x \dot{x} - \hat{L} = \frac{1}{2} p_x p_q - \frac{\alpha}{4} p_x^2 - \beta q^2 + x^2,$$

Каноническое преобразование:

$$p_x = 2q_2, \quad x = \frac{1}{2} p^2, \quad q = q_1, \quad p_q = p^1.$$

Квантование

Гамильтониан в терминах операторов рождения и уничтожения:

$$H = -\frac{i}{2}\sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_2}}(a_1 a_2 + a_1 a_2^\dagger - a_1^\dagger a_2 - a_1^\dagger a_2^\dagger) -$$
$$\frac{\omega_2}{8}(a_2^2 - a_2^\dagger a_2 - a_2 a_2^\dagger + (a_2^\dagger)^2) -$$
$$\frac{\alpha}{2\omega_2}(a_2^2 + a_2^\dagger a_2 + a_2 a_2^\dagger + (a_2^\dagger)^2) -$$
$$\frac{\beta}{2\omega_1}(a_1^2 + a_1^\dagger a_1 + a_1 a_1^\dagger + (a_1^\dagger)^2)$$

$$H = E_0 + E_1 b_1^\dagger b_1 + E_2 b_2^\dagger b_2$$

Имея конкретный гамильтониан, находим L и M, и приходим к системе:

$$\begin{pmatrix} L_{11}^* & L_{12}^* & M_{11}^* & M_{21}^* \\ L_{21}^* & L_{22}^* & M_{12}^* & M_{22}^* \\ -M_{11} & -M_{21} & -L_{11} & -L_{12} \\ -M_{12} & -M_{22} & -L_{21} & -L_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{i1} \\ u_{i2} \\ v_{i1} \\ v_{i2} \end{pmatrix} = E_i \begin{pmatrix} u_{i1} \\ u_{i2} \\ v_{i1} \\ v_{i2} \end{pmatrix}$$

$$L_{11} = -\frac{\beta}{\omega_1}, \qquad M_{11} = -\frac{\beta}{\omega_1},$$

$$L_{12} = \frac{i}{2}\sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_2}}, \qquad M_{12} = \frac{i}{2}\sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_2}},$$

$$L_{21} = -\frac{i}{2}\sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_2}}, \qquad M_{12} = \frac{i}{2}\sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_2}},$$

$$L_{22} = (\frac{\omega_2}{4} - \frac{\alpha}{\omega_2}), \qquad M_{22} = (-\frac{\omega_2}{4} - \frac{\alpha}{\omega_2}),$$

Собственные значения матрицы:

$$e^1 = -\sqrt{\frac{-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2}} \quad e^2 = \sqrt{\frac{-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2}}$$

$$e^3 = -\sqrt{\frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2}} \quad e^4 = \sqrt{\frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2}}$$

При учете условий унитарности имеем:

$$E_1 \in \{e^1, e^2\}, E_2 \in \{e^3, e^4\}.$$

Проверка на уравнениях движения

Уравнение движения для заданного лагранжиана:

$$\ddddot{q} - \alpha\ddot{q} + \beta q = 0.$$

Подставим решение в виде плоских волн $q = q_0 e^{-iEt}$

Получаем: $$E^4 + \alpha E^2 + \beta = 0.$$

Тогда значения энергии совпадают с найденными при квантовании :

$$E^2 = \frac{1}{2}(-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}), \qquad \alpha < 0, \quad 4\beta < \alpha^2$$

Выводы:

- Была описана процедура канонического квантования теорий, содержащих старшие производные.
- Показано, что в случае наличия производных N-го порядка, квантовая теория имеет N различных видов возбуждений.
- Получены конкретные значения энергий возбуждений для данного лагранжиана.

Для случая $E_1 = e^2, E_2 = e^4$ имеем:

$$u_{11} = -\frac{ik\left(-4\omega_1 E_1 E_2^2 + 4\beta E_2^2 + \omega_1^2\right)}{\Theta_1 \Omega^-}, \qquad u_{12} = \frac{\Omega^- + 2\omega_2}{\Omega^-};$$

$$v_{11} = -\frac{ik\left(-4\beta E_2^2 + \omega_1^2\right)}{\Theta_1 \Omega^-}, \qquad v_{12} = 1;$$

$$u_{21} = \frac{ik\left(4\omega_1 E_2 E_1^2 + 4\beta E_2^1 + \omega_1^2\right)}{\Theta_2 \Omega^+}, \qquad u_{22} = \frac{\Omega^+ + 2\omega_2}{\Omega^+};$$

$$v_{21} = -\frac{ik\left(-4\beta E_1^2 + \omega_1^2\right)}{\Theta_2 \Omega^+}, \qquad v_{22} = 1;$$

$$\Omega^- = \left(\omega_2 - \sqrt{2}\sqrt{-\sqrt{\alpha^2 - 4\beta} - \alpha}\right), \qquad \Omega^+ = \left(\omega_2 - \sqrt{2}\sqrt{\sqrt{\alpha^2 - 4\beta} - \alpha}\right)$$

$$\Theta_1 = (\omega_1 E_1 - 2\beta), \qquad \Theta_2 = (\omega_1 E_2 - 2\beta), \qquad k = \sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_1}}$$